我们用表示实数的三元组.我们的目标是表征的某些子集(称为曲线),这些子集在某种意义上是一维的,并且可以应用微积分的方法.定义此类子集的自然方法是通过可微函数.我们说,如果实变量的实函数在所有点上都具有所有阶的导数(它们是自动连续的),则该函数是**可微的**(或平滑的).以下是曲线的第一个定义,该定义并不完全令人满意,但足以满足本章的目的.

约定符号

|  |  |
| --- | --- |
| 符号 | 描述 |
|  | 维实数空间 |
|  | 一维实数空间子集 |
|  | 曲线上点的(向量)位置 |
|  | 的n阶导数 |
|  | 的一阶导数,与物理中的速度对应, |
|  | 速率,即 |
|  | 的二阶导数,与物理中的加速度对应 |
|  | 的切向量, |
|  | 的内切向量 |
|  | 的法线, |
|  | 笛卡尔坐标系x轴 |
|  | 笛卡尔坐标系y轴 |
|  | 笛卡尔坐标系z轴 |
|  | 曲率 |

上述加粗的符号均表示向量.

注意:本节内容以空间为讨论的对象

**定义1 参数曲线** 可微参数曲线是将实数开区间映射到空间的可微映射:.

在此定义中,可微是指是将每个映射到点的对应关系,并且函数是可微的.变量称为曲线参数.区间是广义的,因此我们不排除的情况.

为了方便,我们将可微参数曲线简称为**平滑曲线**.

参数曲线的例子:

**定义2** 如果可微参数曲线在满足，则该曲线称为规则的[regular].

**定理1** **曲线的长** 平滑曲线长为(推导过程详见教材第8章第一节)

由于,因此

**定理2** 如果和是平滑曲线,是标量,以及是实值函数.则

**定理3** 令为不通过原点的平滑曲线.如果是迹线中最接近原点的点,并且,则位置向量与正交.

**定理4** 令为参数化曲线,对于所有.是非零常数当且仅当在所有上垂直于.

**弧长** 给定,根据定义,从点开始,平滑曲线的弧长为

**注意**:弧长是关于变量的函数,而曲线的长则是常量.

**速率** 根据微积分原理,公式(2)两边同时取导数,得到

即,路径的导数(切线)就是速率.或者是,粒子沿着其路径移动的速度是的大小.

如果用表示,即.将带入到.根据链式法则

公式(4)成立意味着,该等式的证明可以在教材第8章第一节找到.

**定义3 单位切向量** 平滑曲线的单位切向量

将带入到公式(5),并根据等式(4)可得到

因此,

**定义4 曲率** 平滑曲线的曲率定义为

由于以及,因此

曲率的其它表达形式:

对于平面曲线,曲率为

对于平面曲线,曲率为

**定理4** 的曲率为恒定为0,当且仅当是一条直线.

**法线和副法线(binormal)**

由于=1,因此垂直于.注意本身不是单位向量,我们在点处定义*主单位法向向量[principal unit normal vector]*为

向量

被称为副法线向量.它同时垂直于和.

同时有

由法线和副法线向量以及曲线上某个点确定的平面称为法线平面.由与切向量正交的所有直线组成.由和组成的平面的叫密切平面.

当曲率为0时,法线不存在.

由于和均为单位向量,因此它们各自垂直于对应的向量和.

将带入到公式(7),并根据公式(6)

因此,

将带入到公式(8),并对两边同时取导数,

因此垂直于和**.**

由于同时垂直于和.因此平行于.

**定义5 扭力[torsion]** 令

我们称为**扭力**.

扭力的一种直观形式

当位于平面上时,.(**需要证明**)

将带入到公式(9),并对两边同时取导数,

公式(11),(12)和(13)并称为**Frenet-Serret**公式.

从物理上讲,我们可以认为中的曲线是通过弯曲(曲率)和扭曲(扭转)一条直线获得的.

在这种情况下,通常使用以下术语.平面称为整流平面,平面称为法线平面.包含和并穿过的线分别称为主法线和双法线.曲率的倒数称为处的曲率半径.当然,半径为r的圆的曲率半径等于r,这可以很容易地验证.

**定理5 曲线局部理论的基本定理** 给定可微函数和,存在规则参数化曲线,使得是圆弧长度,是曲率,是的扭力.而且,满足相同条件的任何其它曲线由于刚体运动而不同于.也就是说,存在一个具有正行列式的的正交线性映射和一个向量,使得.

**定理6** 令为弧长参数化曲线,则.